ÉCOLE SPÉCIALE DES TRAVAUX PUBLICS, DU BATIMENT ET DE L'INDUSTRIE

CONCOURS COMMUN D'ADMISSION
AUX ÉCOLES SUPÉRIEURES

DES TRAVAUX PUBLICS
DU BATIMENT
DE MÉCANIQUE-ÉLÉCTRICITÉ
DE TOPOGRAPHIE

SESSION 1984

PREMIERE INTERROGATION DE MATHEMATIQUES

Durée : 3 heures

NOTA : Les cinq sujets sont totalement indépendants et peuvent être traités dans un ordre arbitraire, sous réserve d'indiquer très clairement leur numéro.

Dans cette épreuve comme dans toutes celles qui suivront, il sera tenu compte de la qualité de la présentation, écriture, concision et précision, mise en évidence des résultats.

———xox———

SUJET N° 1

n est un entier >0.

1/ a est un réel dans $\left]-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right[$, i est le nombre complexe habituel.

a) Calculer $\frac{1+i\,tg\,a}{1-i\,tg\,a}$ et $\frac{1+i\,tg\,n\,a}{1-i\,tg\,n\,a}$ en fonction de e^{ia}

b) En déduire que $tg\,n\,a$ est une fonction rationnelle $f(x)$ de $x = tg\,a$ et donner $f(x)$.

On trouvera une expression contenant des puissances $n^{ièmes}$ de binômes qu'on ne cherchera pas à développer.

2/ On considère la fraction rationnelle $f(X)$ correspondante.

a) Déterminer ses pôles et l'ordre de ces pôles.

b) Décomposer $f(X)$ en éléments simples.

On se bornera au cas de n pair.

SUJET N° 2

1/ Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$ une matrice à éléments dans un corps commutatif K.
Vérifier que quels que soient a, b, c on a $A^3 = 0$.

2/ Inversement, on se propose d'étudier les endomorphismes u de $E = K^3$ tels que $u^3 = 0$ et de leur trouver des matrices aussi simples que possible.

Il peut exister un entier $p < 3$ tel que $u^p = 0$ puisque cela implique $u^3 = 0$.

Quelle est la matrice de u si $p = 1$ (Base quelconque) ?

3/ a) On suppose $u \neq 0$ et $u^2 = 0$. Démontrer qu'on a les relations :

$\{0\} \underset{\neq}{\subset} \text{Im}\,u \subset \text{Ker}\,u \underset{\neq}{\subset} E$ ($A \underset{\neq}{\subset} B$ signifie : $A \subset B$ et $A \neq B$).

et $\dim \text{Im}\,u = 1$, $\dim \text{Ker}\,u = 2$.

b) Démontrer qu'on peut choisir dans E deux vecteurs e_1 et e_3 de manière que $e_2 = u(e_1)$ soit une base de Im u, que (e_2, e_3) soit une base de Ker u et qu'enfin $B = (e_1, e_2, e_3)$ soit une base de E.

c) Quelle est la matrice de u par rapport à B ?

4/ On suppose $u^2 \neq 0$ et $u^3 = 0$. Démontrer les relations :

a) $\{0\} = \text{Im}\,u^3 \underset{\neq}{\subset} \text{Im}\,u^2 \underset{\neq}{\subset} \text{Im}\,u \underset{\neq}{\subset} E$.

b) $\text{Im}\,u^2 \subset \text{Ker}\,u \underset{\neq}{\subset} \text{Ker}\,u^2 \underset{\neq}{\subset} E$.

c) $\dim \text{Im}\,u^2 = 1$, $\dim \text{Ker}\,u^2 = 2$, $\dim \text{Im}\,u = 2$, $\dim \text{Ker}\,u = 1$.

d) Montrer qu'il existe au moins un vecteur e_1 tel que $u^2(e_1) \neq 0$.
Montrer que si on pose $e_2 = u(e_1)$, $e_3 = u^2(e_1)$, (e_1, e_2, e_3) est une base de E.

e) Quelle est la matrice de u par rapport à cette base ?

SUJET N°3

1/ On considère les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ (réelles ou complexes) qui vérifient la relation de récurrence

(1) $u_n = u_{n-1} - u_{n-2}$ quel que soit $n \geq 3$.

a) Montrer qu'il existe (et les calculer) deux constantes non nulles r_1 et r_2 telles que, si pour tout $n \geq 1$ on pose $u_n = r_1^n$ (ou $u_n = r_2^n$), chacune des suites (u_n) obtenues vérifie la relation (1).

b) r_1 et r_2 ayant les valeurs trouvées en a), montrer que, quelles que soient les constantes complexes α et β, si on pose pour tout $n \geq 1$, $u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$, la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ obtenue vérifie la relation (1).

c) Inversement, soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite définie par la donnée de u_1, u_2 et la condition de vérifier la relation (1).

Montrer qu'il existe deux constantes α, β bien déterminées telles qu'on ait pour tout $n \geq 1$, $u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$, r_1 et r_2 ayant toujours les valeurs trouvées en a). (On peut raisonner par récurrence).

2/ On considère les matrices $A_1 = (1)$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

et pour tout $n \geq 4$, la matrice carrée d'ordre n ci-après :

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Pour tout $n \geqslant 1$, soit $D_n = \det A_n$.

a) Montrer qu'on a pour tout $n \geqslant 3$, $D_n = D_{n-1} - D_{n-2}$.

b) Calculer D_n. On donnera le résultat sous la forme la plus simple possible en distinguant 6 cas suivant le reste de n (mod 6).

SUJET N° 4

On considère un espace vectoriel euclidien E de dimension finie n sur le corps $\mathbb{R}$. On note $(x \mid y)$ le produit scalaire de deux vecteurs de E.

Soit u un endomorphisme de E. On note φ l'application $(x, y) \longmapsto (u(x) \mid y) = \varphi(x, y)$.

1/ Montrer que φ est une forme bilinéaire sur E.

2/ Montrer que φ est non dégénérée si et seulement si u est un automorphisme de E.

3/ On suppose que φ est symétrique et qu'on a $\varphi(x, x) > 0$ pour tout vecteur $x \neq 0$. Montrer que toute valeur propre de u est réelle et > 0 et que u est un automorphisme de E.

4/ Inversement, on suppose que φ est symétrique et que u possède n valeurs propres (distinctes ou non) réelles et > 0.

a) Soit B une base orthonormale de E.
Montrer que la matrice M de u par rapport à B est symétrique.

b) Montrer que M et u sont diagonalisables.

c) En déduire qu'on a $\varphi(x, x) > 0$ pour tout $x \neq 0$.

SUJET N° 5

Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, on donne la courbe (C) dont une représentation paramétrique en repère orthonormal est :

$$\begin{cases} x = \sin u \operatorname{ch} u + \cos u \operatorname{sh} u \\ y = \sin u \operatorname{sh} u - \cos u \operatorname{ch} u \\ z = 2 \operatorname{sh} u \end{cases}$$

soit $s(u)$ l'abscisse curviligne sur (C) supposée orientée dans le sens des u croissants, l'origine des abscisses curvilignes étant le point de paramètre $u = 0$.

Déterminer $s(u)$, le trièdre de Frenet, la courbure et la torsion de (C).

»»»»»»»»»»»»»»»»»